



1/5

SESSION DE 2001

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Éléments indicatifs de corrigé

EXERCICE 1

PARTIE A

1.
$$MA = \begin{pmatrix} 115 & 95 & 160 \\ 34 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

La première ligne donne les **coûts totaux hors transport** d'un P_1 , d'un P_2 , d'un P_3 .

La seconde ligne donne les **coûts totaux de transport** d'un P_1 , d'un P_2 , d'un P_3 .

2.
$$AV = \begin{pmatrix} 56 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

AV donne les quantités de composants C_1 , C_2 , C_3 nécessaires à la fabrication des unités demandées.

PARTIE B

1. La forme canonique est :

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$$

$$x + 2y + 4z \leq 70$$

$$2x + y + 2z \leq 80$$

$$3x + 2y + 2z \leq 60$$

$$\text{MAX } (3x + 5y + 6z)$$

2. a. Dans le premier tableau, **la variable entrante est z** car le plus grand coefficient positif de la ligne Z est 6.

Si on divise terme à terme les coefficients de la colonne S par ceux de la colonne z , le plus petit quotient positif est le premier ($70 / 4 = 17,5$), correspondant à **la variable sortante E_1** . Le pivot est l'intersection de ces deux rangées soit le terme 4.

b. L'optimum est atteint dans le tableau 3 car tous les coefficients de la ligne Z sont négatifs ou nuls.

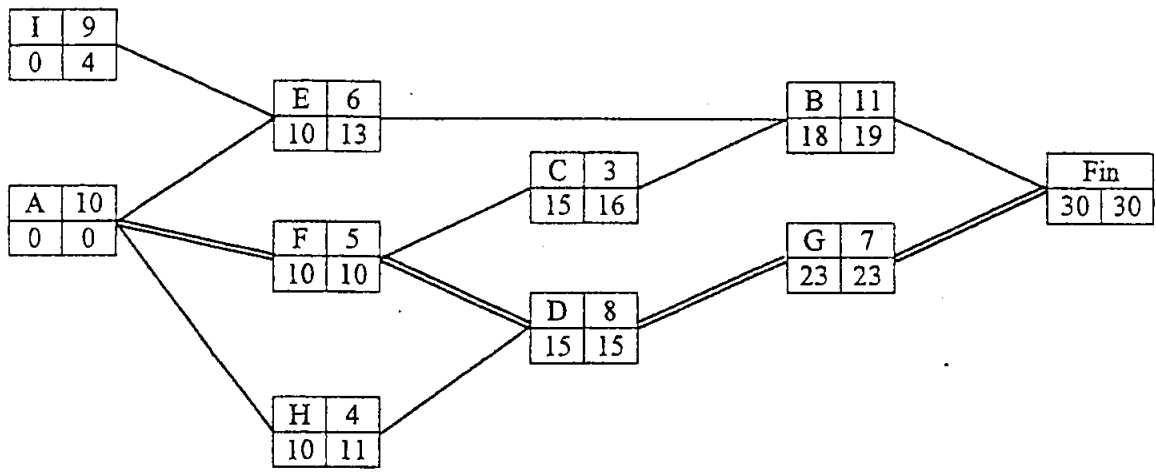
c. Le programme optimal de production est $x = 0$; $y = 25$; $z = 5$.

Sa marge est **155 €**.

d. Si l'entreprise fabrique le programme optimal, il ne lui reste que **45 composants E_2** (et aucun E_1 , aucun E_3).

EXERCICE 2

1. Graphe MPM complété

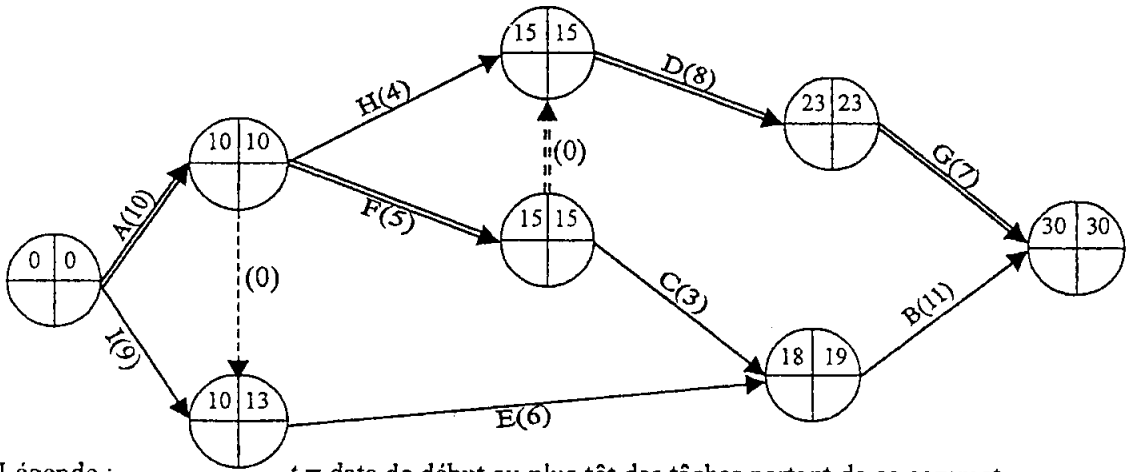


Légende : chemin critique

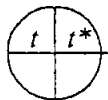
M	d
t	t*

M = nom de la tâche ; d = durée de la tâche M
t = date de début au plus tôt de M ; t* = date de début au plus tard de M

Graphe PERT complété



Légende :



t = date de début au plus tôt des tâches partant de ce sommet
t* = date de fin au plus tard des tâches aboutissant à ce sommet
M = nom de la tâche ; d = durée de la tâche M
-----> tâche fictive ; chemin critique

- a. Chemin critique : (A, F, D, G) Durée minimale : 30 jours.
- b. Marges donn  es en colonne 3 et 4 du tableau ci-après.
- a. En comparant dans le tableau ci-après la valeur donn  e en colonne 4 (marge libre) et celle donn  e en colonnes 5 (20 % de la durée soit 0,2d) de chaque tâche, on constate que :
seules les tâches E et H peuvent voir leur durée augmenter de 20 % sans reculer les dates de début au plus tôt des tâches suivantes. (Pour ces deux tâches, on a : marge libre $\geq 0,2d$.)
- b. En bénéficiant d'une remise de 5 % sur le côté des tâches E et H, on économisera :
 $0,05 \times 3 + 0,05 \times 10$ soit 0,65 milliers d'euros, ou encore 650 euros.

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5
Tâches	Durées (en jours) d	Marges totales	Marges libres	20 % de la durée $0,2 d$
A	10	0	0	2
B	11	1	1	2,2
C	3	1	0	0,6
D	8	0	0	1,6
E	6	3	2	1,2
F	5	0	0	1
G	7	0	0	1,4
H	4	1	1	0,8
I	9	4	1	1,8

3. a. Pour que (A, F, C, B) devienne le chemin critique, il faut que :

(date de début au plus tôt de B + durée de B) > (date de début au plus tôt de G + durée de G)
c'est-à-dire : $18 + X_B > 23 + X_G$ donc $X_B - X_G > 5$.

Cette dernière condition est suffisante comme on le vérifie sur l'un des graphes.

b. La probabilité qu'il en soit ainsi est : $P(X_B - X_G > 5) = 1 - \Pi\left(\frac{5-4}{2,5}\right) \approx 1 - \Pi(0,4) \approx 0,34$.

EXERCICE 3

PARTIE A

1. La probabilité est $\frac{8+7}{200} = 0,075$.

2. a. On répète 40 fois de suite l'épreuve de Bernoulli : « prélever un compte ».

Chaque épreuve a 2 issues :

- succès : le montant du compte est supérieur ou égal à 4 000 € (avec la probabilité $p = 0,075$);
- ou - échec : le montant du compte est inférieur à 4 000 € (avec la probabilité $q = 1 - p = 0,925$).

Les épreuves sont indépendantes (tirages avec remise).

X est le nombre de succès obtenus à l'issue des 40 tirages.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,075$.

[Accepter également une justification montrant que X est la somme de 40 v.a de Bernoulli indépendantes.]

b. $P(X = 1) = 40 \times 0,075 \times 0,925^{39} \approx 0,143$.

c. On approche la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $m = np = 3$.

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx e^{-3} \frac{3^0}{0!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \frac{3^2}{2!} \approx 0,423 \text{ arrondi à } 0,42.$$

PARTIE B

1. a. $E(T)$ peut être estimée ponctuellement par la moyenne échantillon : **1 635**.

b. $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6,116 \times 10^{-4}} = 1\,635,06$ est très proche de l'estimation précédente.

2. $P(1\,000 < T < 2\,000) = F(2\,000) - F(1\,000) = (1 - e^{-2\,000\lambda}) - (1 - e^{-1\,000\lambda}) \approx \mathbf{0,248}$.

3. a. $P(T > 1\,000) = 1 - F(1\,000) = e^{-1\,000\lambda} \approx \mathbf{0,542}$.

b.

$$P(T > 5\,000 \text{ sachant } T > 4\,000) = \frac{P(T > 5\,000 \text{ et } T > 4\,000)}{P(T > 4\,000)} = \frac{P(T > 5\,000)}{P(T > 4\,000)} = \frac{e^{-5\,000\lambda}}{e^{-4\,000\lambda}} = e^{-1\,000\lambda} \approx \mathbf{0,542}.$$

(Ce dernier résultat étant prévisible, puisque T suit une loi exponentielle, on n'exigera pas le recours aux probabilités conditionnelles.)