DECF

SESSION DE 2001 1/7

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

SUJET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures. – COEFFICIENT : 0,5

Matériel autorisé :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans aucun moyen de transmission à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat :

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 et un encart.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

BARÈME INDICATIF :

Exercice 1	*6 points*
Exercice 2	*7 points*
Exercice 3	*7 points*

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants les uns des autres.

Chaque candidat dispose de deux exemplaires de l'**annexe** A, dont **un seul** est **à rendre avec la copie.**
Une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est fournie en *annexe 1*.

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner *explicitement* dans votre copie.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

PARTIE A

Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 à partir de trois composants C_1, C_2 et C_3. Les composants sont acheminés vers l'usine par l'intermédiaire d'une société de transport qui facture le coût de transport à l'unité.

Les données sont rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

	Produits		
	P_1	P_2	P_3
Nombre de composants C_1..........	1	2	4
Nombre de composants C_2..........	2	1	2
Nombre de composants C_3..........	3	2	2

On lit par exemple : pour fabriquer une unité de produit P_3, il faut 4 composants C_1, 2 composants C_2 et 2 composants C_3.

	C_1	C_2	C_3
Coût unitaire hors transport (en euros) .	20	25	15
Coût unitaire de transport (en euros)...	7	6	5

On note A et M les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Travail à faire

1. **Calculer** (*le détail des calculs n'est pas exigé*) **et <u>interpréter</u> le produit matriciel MA.**

2. Une semaine donnée, l'entreprise doit fournir 8 unités de P_1, 12 unités de P_2 et 6 unités de P_3.

   On note V la matrice suivante : $V = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Calculer (*le détail des calculs n'est pas exigé*) **et <u>interpréter</u> le produit matriciel AV.**

PARTIE B

Les contraintes d'approvisionnement sont telles que l'entreprise dispose, chaque semaine, de 70 composants C_1, 80 composants C_2 et 60 composants C_3.

Les marges sur coûts variables unitaires sont de 3 € pour P_1, 5 € pour P_2 et 6 € pour P_3.

On note respectivement x, y et z les nombres d'unités de P_1, P_2 et P_3 fabriquées au cours d'une semaine.

Travail à faire

1. Présenter la forme canonique du programme linéaire permettant de maximiser la marge sur coûts variables hebdomadaire.

2. Un logiciel, résolvant le problème par la méthode du simplexe, fournit les tableaux suivants.

Tableau 1	x	y	z	E_1	E_2	E_3	S
E_1	1	2	4	1	0	0	70
E_2	2	1	2	0	1	0	80
E_3	3	2	2	0	0	1	60
Z	3	5	6	0	0	0	0

Tableau 2	x	y	z	E_1	E_2	E_3	S
z	0,25	0,5	1	0,25	0	0	17,5
E_2	1,5	0	0	– 0,5	1	0	45
E_3	2,5	1	0	– 0,5	0	1	25
Z	1,5	2	0	– 1,5	0	0	– 105

Tableau 3	x	y	z	E_1	E_2	E_3	S
z	– 1	0	1	0,5	0	– 0,5	5
E_2	1,5	0	0	– 0,5	1	0	45
y	2,5	1	0	– 0,5	0	1	25
Z	– 3,5	0	0	– 0,5	0	– 2	– 155

a. Préciser, pour le premier tableau, en justifiant les choix effectués, la variable entrante, la variable sortante et le pivot.

b. Quelle particularité du tableau 3 montre que l'optimum est atteint ?

c. Quel est le programme optimal de production ?
Quelle est la marge correspondante ?

d. Si l'entreprise fabrique le programme optimal, combien reste-t-il de composants de chaque sorte ?

EXERCICE 2

Le GAEC « Les colombiers d'Ensérune » est spécialisé dans l'élevage et la commercialisation du pigeon de chair. Il exploite un vaste élevage moderne de pigeons adultes et lui applique une gestion rigoureuse.

Compte tenu de la nouvelle réglementation européenne, le GAEC décide la construction d'un nouvel abattoir aux normes européennes à la place de l'ancien. Ces travaux causent un dérangement important car ils concernent un point névralgique de l'exploitation. Le GAEC décide donc de les ordonnancer et obtient le tableau suivant, donnant les différentes tâches, leurs durées, leurs coûts, et les tâches immédiatement antérieures :

Tâches	Tâches antérieures	Durées (en jours)	Coûts (en milliers d'euros)
A	–	10	12
B	C - E	11	8
C	F	3	14
D	F - H	8	11
E	A - I	6	3
F	A	5	17
G	D	7	12
H	A	4	10
I	–	9	6

Les graphes MPM et PERT correspondant à l'ordonnancement de ces tâches sont fournis en annexe A *(à rendre avec la copie)*.

Travail à faire

1. **Compléter le graphe MPM ou le graphe PERT donnés en annexe A pour traiter les questions a. et b. suivantes.**
   a. **Déterminer le chemin critique ainsi que la durée minimale de réalisation des travaux.**
   b. **Donner, dans le tableau à compléter de l'annexe A, la marge totale et la marge libre de chaque tâche.**

2. Toutes les entreprises retenues pour effectuer les travaux ont accepté de consentir une remise de 5 % sur les coûts indiqués dans le tableau précédent, à condition de disposer chacune d'au moins 20 % de temps en plus.
   a. **Déterminer toutes les tâches dont la durée peut augmenter de 20 % sans que cela empêche les tâches suivantes de commencer à leur date de début au plus tôt et sans que cela allonge la durée minimale de réalisation des travaux.** *On pourra compléter et utiliser la dernière ligne du tableau de l'annexe A.*
   b. **Déterminer la somme maximale que l'on peut ainsi économiser sur le coût total si l'on se fixe pour règle de commencer toutes les tâches à leur date de début au plus tôt et de ne pas allonger la durée minimale de réalisation des travaux.**

3. En fait toutes les durées peuvent être considérées comme fixes sauf deux : celle de la tâche B, qui est une variable aléatoire notée X_B, et celle de la tâche G, qui est une variable aléatoire notée X_G. On admet que la variable aléatoire $X_B - X_G$ suit la loi normale d'espérance 4 jours et d'écart type 2,5 jours.
   a. **Montrer que le chemin (A, F, C, B) devient le chemin critique si et seulement si les variables aléatoires X_B et X_G vérifient la relation : $X_B - X_G > 5$.**
   b. **Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité que (A, F, C, B) devienne le chemin critique.**

EXERCICE 3

5/7

PARTIE A

Parmi les titulaires d'un compte rémunéré dans une banque B, on a prélevé au hasard un échantillon de 200 clients.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus sur cet échantillon.

Montant (en €)	[0 ; 1 000[	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 4 000[	[4 000 ; 5 000[	[5 000 ; 6 000[
Nombre de comptes	88	52	27	18	8	7

Travail à faire

1. **Quelle est la probabilité que le montant d'un compte pris au hasard dans l'échantillon soit supérieur ou égal à 4 000 € ?**

2. En vue d'une étude individualisée, on prélève au hasard, avec remise, 40 comptes dans l'échantillon. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 40 comptes, associe le nombre de ces comptes dont le montant est supérieur ou égal à 4 000 € .

   a. **Déterminer la loi suivie par X . Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.**

   b. **Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de trouver exactement un compte de montant supérieur ou égal à 4 000 €, parmi les 40 comptes prélevés.**

   c. On approche la loi de X par une loi de Poisson.
   Déterminer son paramètre puis utiliser cette approximation pour calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il y ait moins de 3 comptes de montant supérieur ou égal à 4 000 €, parmi les 40 comptes prélevés.

PARTIE B

Dans la population constituée de tous les comptes rémunérés de toutes les agences de la banque B, on note T la variable aléatoire qui, à chaque compte, associe son montant en euros.

On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 6{,}116 \times 10^{-4}$.

On rappelle que si T suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors sa fonction de répartition F est donnée par : $F(t) = 0$ si $t < 0$

et $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ [où $F(t) = \mathrm{P}(T \leq t)$] .

Travail à faire

1. a. **Déterminer, à partir du tableau de la partie A de cet exercice, une estimation ponctuelle de l'espérance de la variable aléatoire T .**

   b. **Comparer ce résultat à l'espérance de la variable aléatoire T .**

2. **Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité** $P(1\,000 < T < 2\,000)$.

3. a. **Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement** $(T > 1\,000)$.

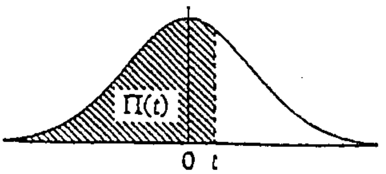
   b. **Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement** $(T > 5\,000)$ **sachant que** $(T > 4\,000)$.

6/7

ANNEXE 1

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = P(T \leqslant t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	09236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

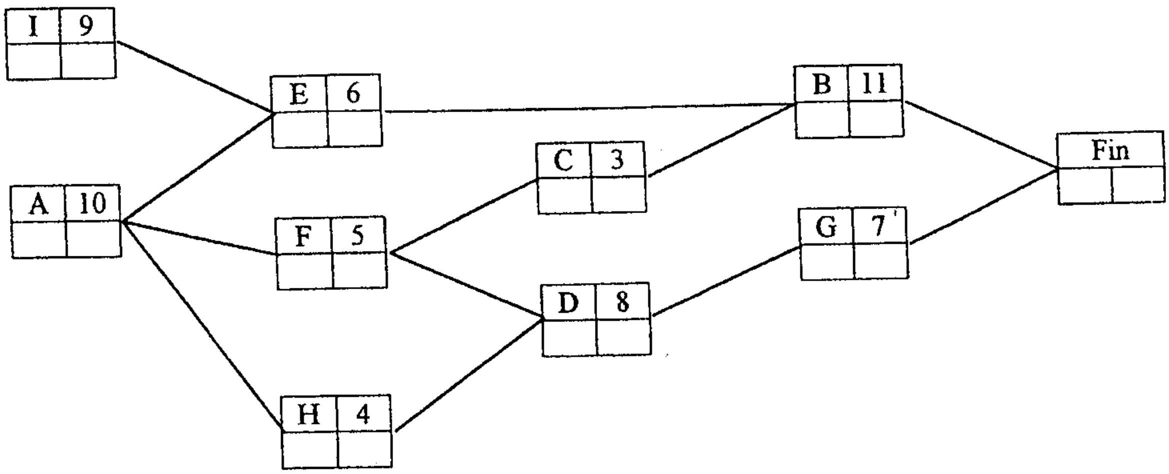
Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geqslant 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

ANNEXE A
à rendre avec la copie

Graphe MPM

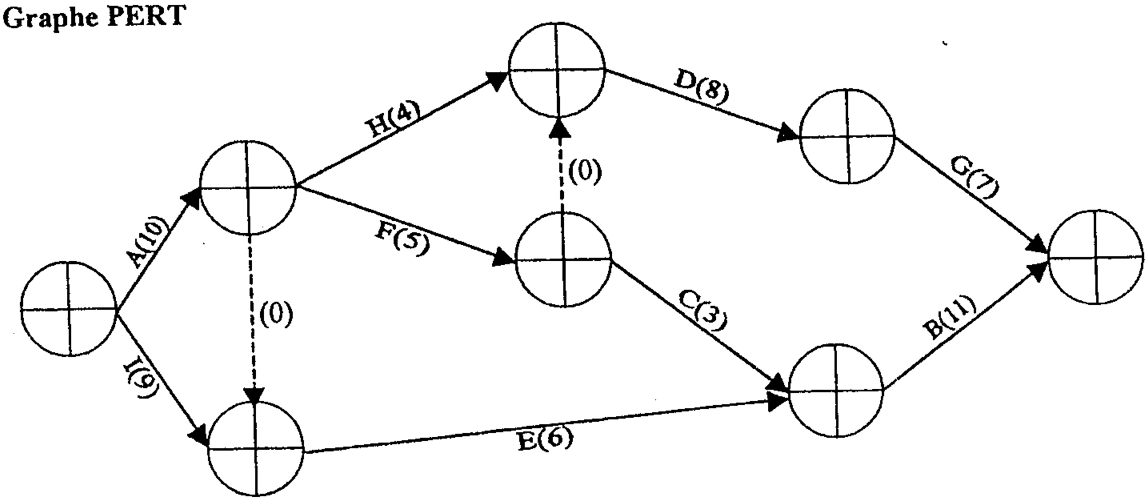


Légende :

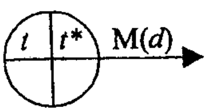
M	d
t	t*

M = nom de la tâche ; *d* = durée de la tâche M
t = date de début au plus tôt de M ; *t** = date de début au plus tard de M

Graphe PERT



Légende :



t = date de début au plus tôt des tâches partant de ce sommet
*t** = date de fin au plus tard des tâches aboutissant à ce sommet
M = nom de la tâche ; *d* = durée de la tâche M
--------> tâche fictive

Tableau à compléter :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durées (en jours) : *d*	10	11	3	8	6	5	7	4	9
marges totales									
marges libres									
20 % de la durée : 0,2 *d*									